Bac Mathématiques

Cameroun 2023

Série C

Durée : 4h
Coefficient : 7

Partie A : Évaluation des resources (13,25 points)

Exercice 1 (4,5 points)

On considère les fonctions numériques f et h de la variable réelle x définies sur $\mathcal{D} =]1;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + ln\sqrt{x-1}$ et $h(x) = \frac{2x-2-\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}$. Le plan est rapporté à un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathcal{D}$. 0,75 pt
2) Montrer que le réel 2 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$. 0,5 pt
3) En déduire suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$. 0,5 pt
4) Montrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $h'(x) = \frac{f(x)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$ puis en déduire les variations de h. 0,75 pt
5) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{n}h\left(2+\frac{j}{n}\right)$ et on pose $I = \int_2^3 h(x)dx$.
   a) Calculer $\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}dx$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire la valeur de I. 0,75 pt
   b) Soient $n \in IN^*$ et j un entier naturel tel que $0 \leq j \leq n-1$. En utilisant les variations de h sur $[2;+\infty[$, démontrer que $\frac{1}{n}h\left(2+\frac{j}{n}\right) \leq \int_{2+\frac{j}{n}}^{2+\frac{j+1}{n}} h(x)\,dx \leq \frac{1}{n}h\left(2+\frac{j+1}{n}\right)$. 0,5 pt
   c) Déduire de la question précédente que : $u_n - \frac{h(3)}{n} \leq I \leq u_n - \frac{h(2)}{n}$. 0,5 pt
   d) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in IN}$. 0,25 pt

Exercice 2 (4,25 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère l'équation
(E) : $z^2 + (-3cos\alpha - 1 + i(3 - 5sin\alpha))z + 5sin\alpha - 2 + i(-3cos\alpha - 1) = 0$ d'inconnue complexe z où α est un nombre réel.

1) Montrer que $-i$ est une solution de (E). 0,25 pt
2) En déduire l'autre solution. 0,5 pt
3) Montrer que l'ensemble des points A_α d'affixe $z_\alpha = 3cos\alpha + 1 + i(-2 + 5sin\alpha)$ lorsque α décrit IR est la conique (ε) d'équation : $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$. 0,5 pt
4) Soit $\Omega(1;-2)$ un point du plan.
a) Déterminer une équation de (ε) dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$. 0,5 pt
b) En déduire la nature exacte de (ε) ; préciser son excentricité et les cordonnées de ses sommets dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$. 1 pt
c) Construire (ε) dans le repère $(\Omega;\vec{i},\vec{j})$. 0,75 pt
5) Soient B et C deux points d'affixes respectives $-i$ et 3.
a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω telle que S(C)=B. 0,5 pt
b) En déduire l'angle de S. 0,25 pt

Exercice 3 (4,5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soient $A(-1;-1;0)$; $B(0;0;2)$ et $C(-1;1;2)$ trois points de l'espace.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan. **0,5 pt**
2) Déterminer une équation cartésienne de ce plan. **0,5 pt**
3) Soit (P) le plan d'équation : $x+y-z+2=0$.
   Déterminer l'expression analytique de la réflexion f de plan (P). **0,75 pt**
4) Soit g la transformation de l'espace d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x+2y-2z+4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x-y-2z+4) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x-2y-z+8) \end{cases}$$

a) Montrer que l'ensemble (D) des points invariants par g est la droite passant par B dont un vecteur directeur est $\vec{u}(-1;-1;1)$. **0,75 pt**

b) Soient M et M' deux points de l'espace tels que g(M)=M'.

i) Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est un vecteur normal à la droite (D). **0,5 pt**

ii) Montrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient à (D). **0,5 pt**

c) En déduire que g est un demi-tour. **0,25 pt**

5)a) Montrer que $(P)\perp(D)$. **0,25 pt**

b) En déduire que fog est une symétrie centrale dont on précisera le centre. **0,5 pt**

Partie B : Évaluation des compétences (6,75 points)

Situation :

KEMO vend des marchandises qu'il pèse sur une balance très contestée par sa clientèle ces derniers jours. Pour la conquérir, il envisage d'acquérir une nouvelle balance constituée d'un ressort que l'on suspend verticalement pouvant s'étirer ou s'allonger d'au plus de 7cm, et, voudrait investir 130000FCFA dans la publicité.

Il lui faut cependant convaincre ses deux fournisseurs qui lui rendent visite à des fréquences différentes. Pour cela, il a besoin de connaître : la masse maximale que peut peser la balance sollicitée, le chiffre d'affaires que cette publicité pourrait permettre de réaliser et la prochaine date de coïncidence de la visite des deux fournisseurs.

Données :

a) Du ressort de la balance : Une étude expérimentale montre que le ressort est indéformable et s'allonge de 2 cm lorsqu'on accroche une masse de 4kg. Par ailleurs, lorsqu'on l'étire de sa position d'équilibre et l'abandonne sans vitesse initiale, son élongation $x(t)$ vérifie l'équation $x''(t)+\frac{k}{4}x(t)=0$ où k est la constance de raideur du ressort. De plus, on a l'égalité $mg=k\Delta l_0$, où m est la masse du corps accroché au ressort et Δl_0 l'allongement au repos. Apres une minute, le centre de gravité du solide repasse pour la première fois au point initial. $g=9{,}5\,N/kg$; $\pi=3{,}14$.

b) Chiffre d'affaires en fonction des frais de publicité : Le tableau ci-dessous montre ses dépenses en publicité exprimées en dizaine de milliers et son chiffre d'affaires pour la même période, sur les dix dernières années (exprimé en dizaine de millions). On admettra que le chiffre d'affaires suit un ajustement linéaire par rapport au frais de publicité.

Frais de publicité (x_i)	6	6,5	6,8	7	7,8	9	10.5	11	11,3	11
Chiffre d'affaires (y_i)	220	229	225	237	235	247	250	268	258	264

c) Le premier fournisseur lui rend visite tous les 21 jours et le 20 décembre 2020, il était au marché. Quant au second fournisseur, il lui rend visite tous les 16 jours et était au marché le 27 décembre 2020.

Tâches :

1) Déterminer la masse maximale que cette balance peut peser. **2,25 pts**
2) Estimer le chiffre d'affaires qu'il pourra espérer des frais de publicité investis. **2,25 pts**
3) Donner la date de la prochaine coïncidence des deux fournisseurs. **2,25 pts**

Correction

Bac Cameroun 2023 série C

Partie A : Évaluation des ressources (13,25 points)

Exercice 1 (4,5 points)

On considère les fonctions numériques f et h de la variable réelle x définies sur $\mathscr{D} =]1\ ;\ +\infty[$ par

$f(x) = x - 2 - \ln\sqrt{x-1}$ et $h(x) = \dfrac{2x - 2 - \ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

1. Nous devons dresser le tableau de variations de f sur $\mathscr{D}$.

Déterminons d'abord les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$.

- • $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-2) = 1 - 2 = -1.$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty \end{cases} \underset{(X=\sqrt{x-1})}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 1^+} \ln\sqrt{x-1} = -\infty$

$\Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 1^+} (x - 2 - \ln\sqrt{x-1}) = -\infty$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty}$

- $$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(x - 2 - \ln\sqrt{x-1}) &= \lim_{x\to+\infty}(x - 1 - 1 - \ln\sqrt{x-1}) \\
&\underset{(X=x-1)}{=} \lim_{X\to+\infty}(X - 1 - \ln\sqrt{X}) \\
&= \lim_{X\to+\infty}(X - \ln\sqrt{X} - 1) \\
&= \lim_{X\to+\infty}(\ln \mathrm{e}^X - \ln\sqrt{X} - 1) \\
&= \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^X}{\sqrt{X}}\right) - 1 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Déterminons ensuite le signe de la dérivée $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathscr{D}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x-2)' + (\ln\sqrt{x-1})' \\
&= 1 + \frac{(\sqrt{x-1})'}{\sqrt{x-1}} \\
&= 1 + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2(x-1)}
\end{aligned}$$