Bac Mathématiques 2022 Cameroun série C-E

Durée : 4 heures

Coefficient : 7 - 6

Cette épreuve est constituée de deux parties indépendantes.

Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{e_1}\,,\vec{e_2})\cdot$

On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives : $Z_A = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $Z_B = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$; $Z_F = 4$ et $Z_G = -4$.

1. Résoudre dans $\mathbf{C}$, l'équation $z^2+2-2\mathrm{i}\sqrt{3} = 0\cdot$

2. Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,z\cdot$
   a. Donner les éléments caractéristiques de s .
   b. Quelles sont les images par s des points A et B ?

3. Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse de foyers A et B et d'excentricité $e = \frac{1}{2}\cdot$
   a. Déterminer une équation de l'image $(\mathcal{E}')$ de $(\mathcal{E})$ par la similitude s .
   b. Construire $(\mathcal{E}')$ puis $(\mathcal{E})$ dans le même repère.

4. Aicha a choisi au hasard l'un après l'autre, deux points distincts parmi les points O, A, B, F et G comme ceux par lesquels passe l'axe focal de l'ellipse $(\mathcal{E}')$.
   Quelle est la probabilité qu'elle ait choisi deux points de l'axe focal de $(\mathcal{E}')$?

Exercice 2 (5 points)

Soit $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ une base d'un espace vectoriel E .
Soit f un endomorphisme de E .

1. Pour k appartenant à $\mathbf{R}$, on considère l'ensemble E_k des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $f(\vec{u}) = k\vec{u}\cdot$
   a. Démontrer que E_k est un sous-espace vectoriel de E .
   b. On suppose que f vérifie l'égalité $f\circ f = 2\,f\cdot$
   Démontrer que $\vec{u}\in Imf$ si et seulement si $\vec{u}\in E_2\cdot$

2. On suppose ici qu'on a :

$$f(\vec{i}+\vec{j}) = 2\vec{i}+2\vec{j}$$
$$f(\vec{i}-\vec{j}) = 2\vec{i}-2\vec{j}$$
$$f(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = \vec{0}\cdot$$

   a. Démontrer que $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$, $f(\vec{j}) = 2\vec{j}$ et $f(\vec{k}) = -2\vec{i}+2\vec{j}\cdot$
   b. Donner la matrice M de f dans la base $(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.
   c. Démontrer que $f\circ f = 2\,f\cdot$
   d. Déterminer par une de ses bases, le noyau $Ker\,f$ de f .
   e. Déterminer l'image $Im\,f$ de f . On précisera une de ses bases.

Exercice 3 (5 points)
f est une fonction définie sur $[0\,;\,2\pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\cdot$
$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe de f dans un repère orthogonal où en abscisse, on a 2 cm pour unité et en ordonnée 4 cm pour unité.

1. Démontrer que $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0\cdot$

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3. **a.** Démontrer qu'on a : $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\cdot$
   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les courbes d'équations $y = \mathrm{e}^{-x}$ et $y = -\mathrm{e}^{-x}\cdot$

4. Sur $[0\,;\,2\pi]$, tracer dans le même repère, les courbes d'équations $y = \mathrm{e}^{-x}$ et $y = -\mathrm{e}^{-x}$ puis la courbe $(\mathcal{C}_f)\cdot$

5. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;\,2\pi]$. *On pourra utiliser la question 1.*

Partie B : Évaluation des compétences (15 points)

Situation :

Trois gisements de gaz A, B et C présentant chacun 100 milliards de m^3 de quantité, ont été découverts dans un pays. L'inauguration a eu lieu une certaine année (année 0) prise comme origine des temps t (en années).
L'exploitation du gaz des gisements A et B avait commencé à la date $t = 0$ et celle du gisement C légèrement avant. Seulement, à la date $t = 1$, la quantité totale du gaz extraite de chacun des gisements A et C était de 5,01 milliards de m^3.

− Pour le gisement A et à partir de la 2e année, la quantité de gaz extraite chaque année augmente de 0,75 milliards de m^3 par rapport à celle de l'année précédente.
− Pour les gisements B et C, les ingénieurs pétrochimistes savent que si $q(t)$ est la quantité totale (en milliards de m^3) de gaz extraite de chacun de ces gisements à la date t , alors le taux d'extraction ou de consommation de gaz du gisement à cette date t est $q'(t)$ (milliards de m^3 par an).

- Au niveau du gisement B, ce taux est $\left(\dfrac{1}{2t+1} + 0,02t\right)$ milliard de m^3 par an.
- Au niveau du gisement C, ces taux (aux dates t) sont proportionnels aux quantités de gaz extraites à ces dates. A la date $t = 1$ ce taux était 5,01 milliards de m^3 par an.

Tâches :

1. En combien d'années le gisement A s'épuisera-t-il ?
2. Combien d'années d'extraction suffiront à ce pays pour épuiser le contenu du gisement B ?
3. Après l'inauguration, combien d'années faudra-t-il à ce pays pour vider le gisement C de son contenu ?

Correction

Bac Cameroun 2022 série C-E

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (15 POINTS)

Exercice 1 (5 points)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2})$.
On considère les points A, B, F et G d'affixes respectives : $Z_A = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $Z_B = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$; $Z_F = 4$ et $Z_G = -4$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 + 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 0$.

$$\begin{aligned} z^2 + 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad z^2 = 1 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad z^2 = 1 + 2\mathrm{i}\sqrt{3} + \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z^2 = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z = -(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Par conséquent, **l'ensemble des solutions de l'équation $z^2+2-2\mathrm{i}\sqrt{3} = 0$ est** $\boxed{S = \{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\,; -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\}}$.

2. Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\,z$.
2. a) Nous devons donner les éléments caractéristiques de s .

Si s est une similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, alors s est la similitude directe de centre d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

- Puisque s est la similitude directe d'expression complexe $z' = (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})\,z + 0$, **le centre de s est O .**

- Déterminons le rapport de s .

$$\left|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$
D'où **le rapport de s est égal à 2.**

- Déterminons l'angle θ de s .

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$$
D'où **l'angle de s est égal à** $-\dfrac{\pi}{3}$.

Par conséquent, **s est la similitude directe de centre O , de rapport 2 et d'angle** $-\dfrac{\pi}{3}$.

2. b) Nous devons déterminer les images par s des points A et B.

Soit $A' = s(A)$ et notons $Z_{A'}$ l'affixe de A' .