

Bac probatoire Cameroun 2022

Mathématiques série C/ E

Durée : 3 heures

Coefficient : 6 / 5

Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 (3,5 points)

1. Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ l'équation $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Exprimer $\cos^2 t + \tan^2 t + \sin^2 t$ en fonction de $\cos t$.
3. Déterminer deux réels A et φ tels que $\sqrt{3}\cos(2t) - \sin(2t) = A\sin(2t + \varphi)$.

Exercice 2 (3 points)

f est le polynôme défini pour tout réel x par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{31}{6}$.

1.
 - a. Montrer que la courbe de f passe par le point de coordonnées $(-1 ; 0)$.
 - b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans \mathbf{R} .
2.
 - a. Calculer pour tout réel x , $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
 - b. Etudier le sens des variations de f sur \mathbf{R} .

Exercice 3 (3,5 points)

A , B et C sont trois points non alignés du plan et D le barycentre du système $(A ; 1) ; (B ; -1) ; (C ; 1)$.

1. Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M , associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{BM'} + \overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{MM'}$.
 - a. Justifier que h ne peut être une translation.
 - b. Montrer que $\overrightarrow{DM'} = 2\overrightarrow{DM}$.
 - c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de h .
2. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$ et φ l'endomorphisme du plan vectoriel E_2 défini par :

$$\varphi(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j} \text{ et } \varphi(\vec{j}) = m\vec{i} + 3\vec{j} \text{ où } m \text{ est un réel donné.}$$

- a. Justifier que (\vec{i}, \vec{j}) est une base du plan.
- b. Ecrire la matrice E de φ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .
- c. Déterminer la valeur de m pour que φ ne soit pas un automorphisme de E_2 .

Exercice 4 (5 points)

1. Dire pour chacune des affirmations suivantes, si elle est vraie ou fausse :
 - a. Deux droites de l'espace, perpendiculaires chacune à une troisième, sont parallèles.
 - b. Pour montrer que deux droites de l'espace sont orthogonales, il suffit de trouver un plan contenant l'une des deux droites, auquel l'autre est orthogonale.

2. L'espace est rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $(P) : 2x - y + z - 1 = 0$ et $(Q) : x + y - z + 2 = 0$.
- Montrer que les plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles.
 - Donner par ses coordonnées un point, et par ses composantes un vecteur non nul de la droite commune à (P) et (Q) .

Partie B : Évaluation des compétences (5 points)

Des jeunes veulent mettre sur pied une petite et moyenne entreprise (PME), de production et de vente d'un article donné. L'étude de faisabilité réalisée pour ce projet montre que le coût de production en FCFA d'un nombre x de cet article est : $C(x) = x^2 + 202500$.

Le prix de vente d'une unité de cet article est fixé à 1500 FCFA.

La capacité de production de cet article par cette PME est limitée à 1300 unités.

Pour un début, il y a six postes de responsabilités dans cette PME. Dix demandes ont été sélectionnées, présentant les mêmes atouts et donnant ainsi lieu à de sérieuses difficultés de choix. La direction décide donc de mettre dans des enveloppes coûtant 100 FCFA l'unité, et à raison d'un groupe dans une enveloppe, les différents groupes des noms des six potentiels responsables, pour un tirage au sort. Une somme de 12500 FCFA a été prévue pour l'achat de ces enveloppes.

Ces jeunes décident de contracter un prêt de dix millions de FCFA sur une période de cinq ans, auprès d'une coopérative de la place pour un taux de 12,5 % d'intérêt annuel et composé. Pour maximiser son décollage, cette PME ne fera aucun remboursement entre temps. En revanche, ce groupe de jeunes a un parrain qui a accepté d'hypothéquer ce prêt par le titre foncier de son terrain dont les experts en affaires financières ont estimé la valeur à environ dix-huit millions de FCFA, cinq années après la période de demande du prêt.

Tâches :

- Quel est le nombre minimum de cet article que cette PME doit produire pour espérer réaliser un bénéfice ?
- Le budget prévu pour l'achat des enveloppes sera-t-il suffisant ?
- La coopérative doit-elle offrir ce prêt sans courir de risque aussi petit soit-il, en cas de non remboursement au bout de cinq années ?



Correction

Partie A

Exercice 1

1) On a :

$$\begin{aligned} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} &\iff \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases}, k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases}, k, k' \in \mathbb{Z} &\iff \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2k'\pi \end{cases}, k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k'\pi \end{cases}, k, k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On ne garde que les valeurs de x dans l'intervalle imposé $]-\pi; \pi]$.

- Pour $k = -2$: $x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4} \notin]-\pi; \pi]$.
- Pour $k = -1$: $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$.
- Pour $k = 0$: $x = \frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$.
- Pour $k = 1$: $x = \frac{\pi}{4} + \pi \notin]-\pi; \pi]$.
- Pour $k = -2$: $x = \frac{\pi}{12} - 2\pi = -\frac{23\pi}{12} \notin]-\pi; \pi]$.
- Pour $k = -1$: $x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12} \in]-\pi; \pi]$.
- Pour $k = 0$: $x = \frac{\pi}{12} \in]-\pi; \pi]$.
- Pour $k = 1$: $x = \frac{\pi}{12} + \pi \notin]-\pi; \pi]$.

Conclusion :

$$\text{L'ensemble des solutions de l'équation est : } S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}; -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right\}$$

2) Exprimons $\cos^2 t + \tan^2 t + \sin^2 t$ en fonction de $\cos t$.

Le fait que $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, tel que $k \in \mathbb{Z}$, est sous-entendu.

On a, pour tout réel $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t \quad \text{et} \quad \tan^2 t = \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2 = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}$$